

Vježbe 6

5. studenog 2025. 11:31

21. Netko je zaboravio tri posljednje znamenke telefonskog broja i sjeća se samo da su sve tri različite, a posljednja paran broj. Kolika je vjerojatnost da će slučajnim izborom pogoditi pravi broj?

svijet mogućih $n = \underbrace{9}_{\substack{\downarrow \\ \text{bez} \\ \text{zadnje}}} \cdot \underbrace{8}_{\substack{\downarrow \\ \{0,2,4,6,8\}}} \cdot \underbrace{5}_{\substack{\downarrow \\ \{0,2,4,6,8\}}} = 360$

poželjnih brojeva ima samo $m=1$ (samo jedna varijanta zadnje 3 znamenke)

$P(A) = \frac{\overset{\substack{\downarrow \\ \text{pogodilo}}}{m}}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{broj mogućih}}}{n}} = \frac{1}{360}$

19. Kolika je vjerojatnost da se u igri LOTO 6 od 45 u jednoj kombinaciji postigne dobitak od 6, 5, 4 ili 3 pogotka?

izvlačimo →
koristimo $\binom{n}{k}$
(poredak nije bitan)

45 brojeva → 6 se izvlači → broj mogućih kombinacija $n = \binom{45}{6} = \dots 8\,145\,060$

$A = \{\text{dobitak od 6 pogotka}\} \rightarrow$ broj poželjnih $m_A = \overset{\substack{\text{od 6 dobrih odabrati svih 6}}}{\binom{6}{6}} = 1$

$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{8\,145\,060} = 0.0000\dots$

$B = \{\text{dobitak od 5 pogotka}\} \rightarrow$ broj poželjnih $m_B = \overset{\substack{\text{od 6 dobrih odabrati 5}}}{\binom{6}{5}} \cdot \underbrace{\binom{39}{1}}_{\substack{\text{i od nedobrih 39} \\ \text{izabrati 1}}}$

$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{234}{8\,145\,060}$

$m_B = 6 \cdot 39 = 234$

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{234}{8145060}$$

$$m_B = 6 \cdot 39 = 234$$

$$C = \{ \text{dobitak od 4 pogodbe} \} \rightarrow \text{broj povoljnih } m_C = \binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2}$$

$$m_C = \binom{6}{2} \cdot \binom{39}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{39 \cdot 38}{2 \cdot 1} = 11115$$

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{11115}{8145060}$$

$$D = \{ \text{dobitak od 3} \} \rightarrow \text{broj povoljnih } m_D = \binom{6}{3} \cdot \binom{39}{3}$$

$$= 182780$$

$$P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{182780}{8145060}$$

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 0.023 //$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 disjunkt
 tj. isključuju se pa samo +

GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

skup ukupni "živino"

Ω – ograničen skup točaka na pravcu, u ravnini ili u prostoru

$m(\Omega)$ – mjera skupa Ω (može biti duljina, površina ili volumen od Ω)

Biramo točku na sreću unutar skupa Ω . Tada je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar njegovog podskupa A jednaka

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

mjera povoljnog

mjera mogućeg

Gornju formulu možemo protumačiti na način da je vjerojatnost mjera povoljnog kroz mjeru mogućeg dijela



Ω – ograničen skup točaka na pravcu, u ravnini ili u prostoru

$m(\Omega)$ - mjera skupa Ω (može biti duljina, površina ili volumen od Ω)

Biramo točku na sreću unutar skupa Ω . Tada je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar njegovog podskupa A jednaka



$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

mjera povoljnog

mjera mogućeg

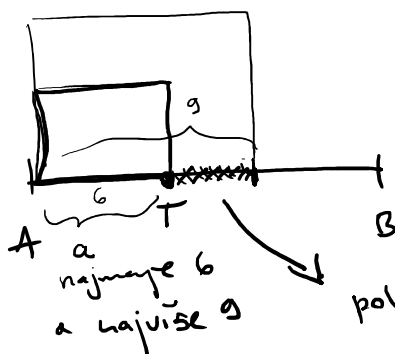
Gornju formulu možemo protumačiti na način da je vjerojatnost mjera povoljnog kroz mjeru mogućeg dijela.

22. Na dužinu AB duljine 12 cm slučajno je bačena jedna točka T . Kolika je vjerojatnost da površina kvadrata sa stranicom AT bude sadržana između 36 cm^2 i 81 cm^2 ?



DUGINA?

$$m(\Omega) = 12 \text{ cm}$$



površine kvadrata

$$36 \leq a^2 \leq 81$$

$$6 \leq a \leq 9$$

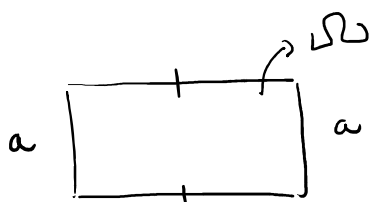
povoljni skup točaka A'

$$m(A') = 9 - 6 = 3$$

$$P(A') = \frac{m(A')}{m(\Omega)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

23. U pravokutnik sa stranicama duljine a i $2a$, slučajno je bačena jedna točka. Kolika je vjerojatnost da je točka pala:

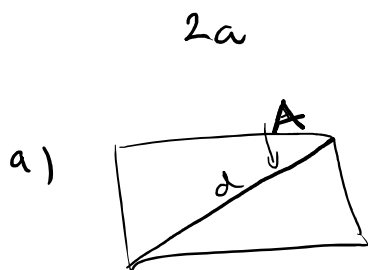
- Na dijagonalu,
- Bliže duljoj stranici pravokutnika?



→ dio ravnine pa je $m = \text{površina}$!

$$m(\Omega) = 2a \cdot a = 2a^2$$

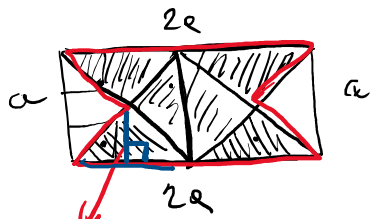
duljina · širina



površina
 $m(A) = 0$

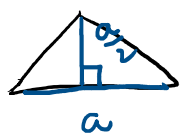
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{0}{2a^2} = 0$$

b) Bliže dužoj stranici pravokutnika?



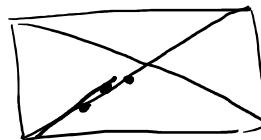
A površina

$$m(A) = \left[\frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot 6 \right]$$



$$= \frac{a^2}{4} \cdot 6$$

$$m(A) = \frac{3}{2} a^2$$



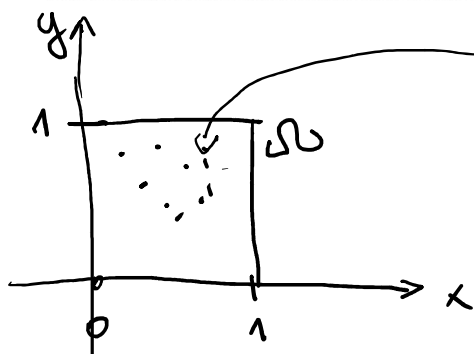
u kvadratu smo na dijagonali
jednako udaljeni od stranica
susjednih

površine trokuta

$$P = \frac{a \cdot a}{2}$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \left[\frac{\frac{3}{2} a^2}{2a^2} \right] = \frac{3}{4}$$

24. Iz intervala $[0,1]$ slučajno su izabrana dva broja, x i y . Kolika je vjerojatnost da ti brojevi zadovoljavaju nejednakosti $x \geq \frac{1}{2}$ i $y \leq x$?



$x, y \in [0,1]$

površine

$$m(\Omega) = 1 \cdot 1 = 1$$

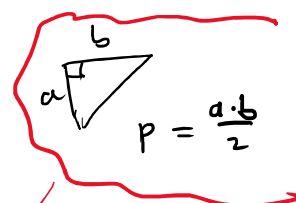
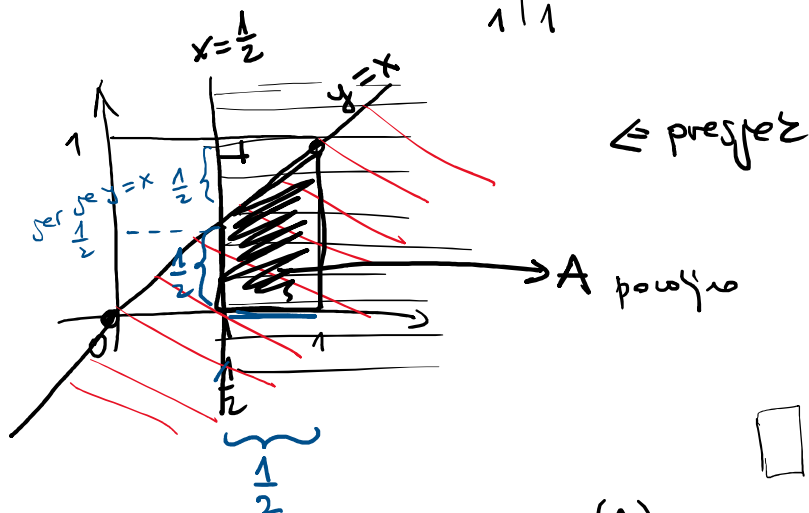


$$m(\Omega) = 1 \cdot 1 = 1$$

$x \geq \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$ je vertikalne i desno

$y \leq x$ i idu ispod

x	y
0	0
1	1



$$m(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

$$m(A) = \frac{3}{8}$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{3}{8}}{1} = \frac{3}{8}$$

~~23.~~ VAŽAN TIP ZADATKA

26. Dva aviona slijeću na aerodrom u slučajnim trenucima između 19 i 20 sati.

Kolika je vjerojatnost da će između slijetanja aviona proći barem 40 minuta?

x - vrijeme slijetanja 1. aviona

y - vrijeme slijetanja 2. aviona

$$x, y \in [19, 20] \text{ sati, tj. unutar 1h} \rightarrow x, y \in [0, 1] \text{ h} \rightarrow x, y \in [0, 60] \text{ min}$$

1. slučaj - 1. avion došao prvi

2. slučaj - 2. avion došao prvi

1. slučaj - 1. autob došao prvi
x manji

između barem 40
 $y - x \geq 40$

y ne
jednak
x

$y \geq x + 40$

crtao:
pravce

iznad
 $y = x + 40$

x	y
0	40
20	60

2. slučaj: 2. autob došao prvi
y manji

$x - y \geq 40$

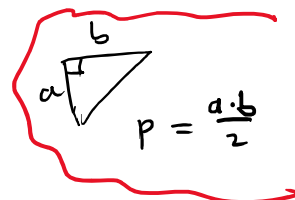
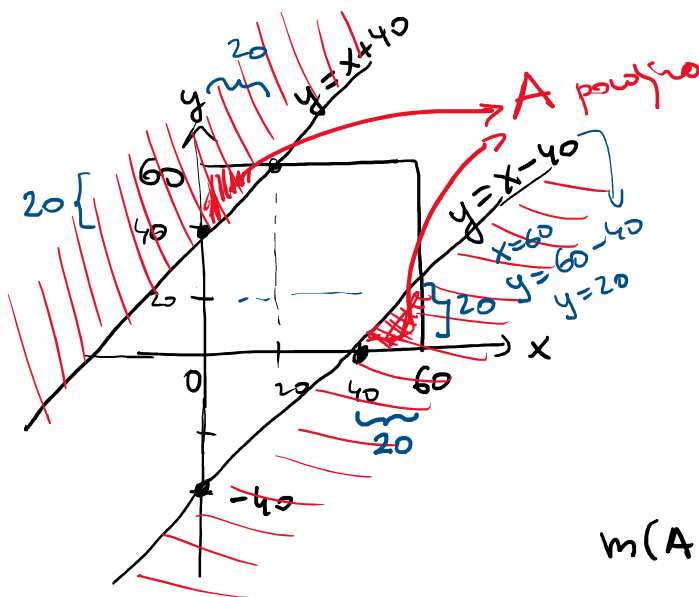
$-y \geq -x + 40 \quad | \cdot (-1)$

$y \leq x - 40$

ispod pravce

$y = x - 40$

x	y
0	-40
40	0



$m(A) = \frac{20 \cdot 20}{2} \cdot 2$

$m(A) = 400 \text{ cm}^2$

$m(\Omega) = 60 \cdot 60$
 $= 3600$

$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{400}{3600} = \frac{1}{9}$

27. razmisli

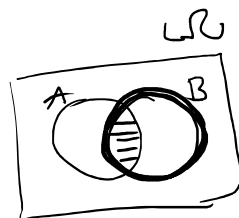
StoD 2 → UVJETNA VJEROJATNOST

3. UVJETNA VJEROJATNOST

Uvjetna vjerojatnost događaja A, ako je poznato da se ostvario događaj B takav da je $P(B) > 0$, je broj

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

→ ^{ako} $P(A \cap B)$ → koliko je A
→ $P(B)$ → brojice



1. Bacamo simetričnu kocku. Kolika je vjerojatnost da je kocka pala na broj 1
ako je pala na neparan broj?

$$A = \{ \text{kocke pale na 1} \} = \{1\}$$

ako znamo $B = \{ \text{kocke pale na neparan broj} \} = \{1, 3, 5\} \rightarrow P(B) = \frac{3}{6}$
za B

$$P(A|B) = ?$$

$$A \cap B = \{ \text{pala na 1} \} = \{1\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

→ jer bacamo kocku; B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

2. Bacamo dvije simetrične kocke. Ako su kocke pale na različite brojeve, kolika je vjerojatnost da je zbroj tih brojeva veći od 8?

2 kocke → B → ^{možda} $n = 6 \cdot 6 = 36$

$$A = \{\text{zbroj veći od } 8\}$$

ako znamo $B = \{\text{pale ne različite brojeve}\} \rightarrow m_B = \overset{\text{pozitivni}}{6} \cdot \underset{\text{bez praznog}}{5} = 30$

$$P(A|B) = ?$$

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{30}{36}$$

$$A \cap B = \{\text{zbroj } > 8 \text{ i različiti}\}$$

$$= \{36, 46, 56, \\ 63, 64, 65, \\ 45, 54\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{8}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{\cancel{36}}}{\frac{30}{\cancel{36}}} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} //$$